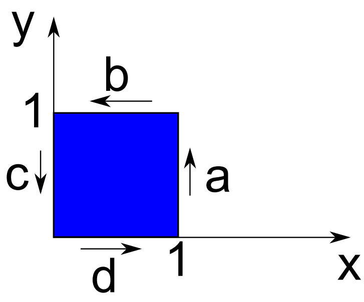
Variational Methods for Computer Vision: Solution Sheet 6

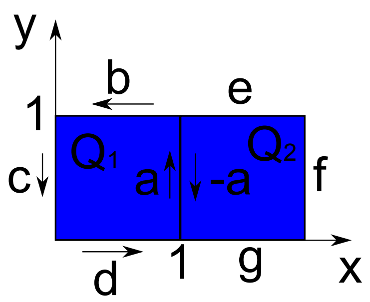
Exercise: 09 December 2015

Part I: Theory



1. (a)

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{Q} v_x(x,y) - u_y(x,y)\mathrm{dxdy} &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 v_x(x,y) - u_y(x,y)\mathrm{dxdy} \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 v_x(x,y)\mathrm{dxdy} - \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 u_y(x,y)\mathrm{dydx} \\
&= \int\limits_0^1 \left. v(x,y)\right|_{x=0}^{x=1} \mathrm{dy} - \int\limits_0^1 \left. v(x,y)\right|_{y=0}^{y=1} \mathrm{dx} \\
&= \int\limits_0^1 v(1,y) - v(0,y)\mathrm{dy} - \int\limits_0^1 v(x,1) - v(x,0)\mathrm{dx} \\
&= \int\limits_0^1 v(1,y)\mathrm{dy} - \int\limits_0^1 v(0,y)\mathrm{dy} - \int\limits_0^1 v(x,1)\mathrm{dx} + \int\limits_0^1 v(x,0)\mathrm{dx} \\
&= \underbrace{\int\limits_0^1 v(1,y)\mathrm{dy}}_{\int\limits_a v(x,y)\mathrm{dy}} + \underbrace{\int\limits_1^0 v(0,y)\mathrm{dy}}_{\int\limits_c v(x,y)\mathrm{dy}} + \underbrace{\int\limits_1^0 v(x,1)\mathrm{dx}}_{\int\limits_b u(x,y)\mathrm{dx}} + \underbrace{\int\limits_0^1 v(x,0)\mathrm{dx}}_{\int\limits_d v(x,y)\mathrm{dx}} \\
&= \int\limits_{\partial Q} v\mathrm{ds}
\end{aligned}
$$



(b)

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_1} v_x(x,y) - u_y(x,y)\mathrm{dxdy} + \int\limits_{Q_2} v_x(x,y) - u_y(x,y)\mathrm{dxdy} \\
&= \int\limits_{a} v(x,y)\mathrm{dy} \int\limits_{c} v(x,y)\mathrm{dy} + \int\limits_{b} v(x,y)\mathrm{dx} + \int\limits_{d} v(x,y)\mathrm{dx} \\
&- \int\limits_{a} v(x,y)\mathrm{dy} + \int\limits_{e} v(x,y)\mathrm{dx} + \int\limits_{f} v(x,y)\mathrm{dy} + \int\limits_{g} v(x,y)\mathrm{dx}
\end{aligned}
$$