

Numerisches Programmieren (IN0019)

Frank R. Schmidt

Winter Semester 2016/2017

6. Quadratur

Quadratur

Motivation

Bei der Interpolation einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind wir davon ausgegangen, dass f nur für gewisse **Stützstellen** $x_0 < \dots < x_n$ bekannt ist.

Im Folgenden wollen wir eine Funktion $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ an Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$ so auswerten, dass wir das Integral

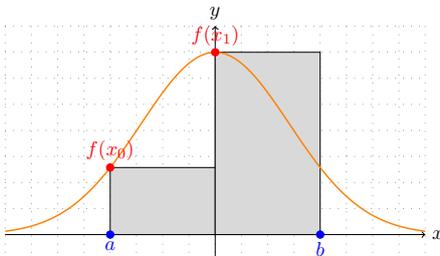
$$I(f) := \int_a^b f(x) dx$$

möglichst gut approximieren.

Eine erste naive Vorgehensweise ergibt sich aus folgender Gleichung

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{n} \quad x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

Integration (Beispiel)



Für die Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$ ergibt sich also (für $a = -1$ und $b = 1$)

$$I(f) \approx 1.49365 \quad \frac{f(x_0) + f(x_1)}{1} \approx 1.36788 \quad \varepsilon_{\text{rel}} \approx 8.42\%$$

Allgemeine Form

Um eine verbesserte Approximation zu finden, wollen wir folgende **Quadraturformel** betrachten

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot w_i$$

Die Parameter, die wir wählen können, sind die $n + 1$ verschiedenen Stützstellen x_i sowie die $n + 1$ Gewichte w_i .

Beide Ausdrücke $I(f)$ und $I_n(f)$ sind für beliebige stetige Funktionen $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ berechenbar. Außerdem sind diese Ausdrücke **lineare Funktionale**, d.h. für $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} I(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) &= \alpha \cdot I(f) + \beta \cdot I(g) \\ I_n(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) &= \alpha \cdot I_n(f) + \beta \cdot I_n(g) \end{aligned}$$

Klassische Quadratur

Mittelpunktregel

Sind die Stützstellen x_i äquidistant über das Intervall $[a, b]$ verteilt, so nennt man die Quadratur **Newton-Cotes-Formeln**. Ist $x_0 = a$ und $x_n = b$, so redet man von **geschlossenen**, andernfalls von **offenen** Newton-Cotes Formeln.

Bei der **Mittelpunktregel** interpoliert man die Funktion f an der Stelle $\frac{a+b}{2}$. Das heißt wir ersetzen $f(x)$ durch das interpolierende Polynom vom Grad 0:

$$\begin{aligned} I_0(f) &= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

Das heißt bei der Mittelpunktregel ist $n = 0$ und wir haben

$$w_0 = b - a \quad x_0 = \frac{a+b}{2}$$

Bei der **Trapezregel** interpoliert man die Funktion f zwischen a und b . Das heißt wir ersetzen $f(x)$ durch das interpolierende Polynom vom Grad 1:

$$\begin{aligned}
 I_1(f) &= \int_a^b \frac{x \cdot (f(b) - f(a)) + bf(a) - af(b)}{b - a} dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(b^2 - a^2) \cdot (f(b) - f(a))}{b - a} + \frac{(b - a)[bf(a) - af(b)]}{b - a} \\
 &= \frac{1}{2} ((a + b) \cdot (f(b) - f(a))) + [bf(a) - af(b)] \\
 &= (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}
 \end{aligned}$$

Das heißt bei der Trapezregel ist $n = 2$ und wir haben

$$w_1 = w_2 = \frac{b - a}{2} \quad x_1 = a \quad x_2 = b.$$

Wenn wir Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$ wählen, erhalten wir das eindeutige Interpolationspolynom mit Hilfe der Lagrangedarstellung, d.h.

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

Damit erhalten wir eine Quadratur mittels

$$w_i = \int_a^b L_i(x) dx$$

Denn es gilt wegen der Linearität

$$I_n(f) = \int_a^b p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot w_i$$

Mittelpunktsregel und Trapezregel

Für $n = 0$ und $x_0 = \frac{a+b}{2}$ erhalten wir

$$L_0(x) = 1 \quad w_0 = \int_a^b L_0(x) dx = b - a,$$

was gerade zur Mittelpunktsregel führt.

Für $n = 1$ und $x_0 = a$ und $x_1 = b$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 L_0(x) &= \frac{b - x}{b - a} & w_0 &= \int_a^b L_0(x) dx = \frac{a + b}{2} \\
 L_1(x) &= \frac{x - a}{b - a} & w_1 &= \int_a^b L_1(x) dx = \frac{a + b}{2},
 \end{aligned}$$

was gerade zur Trapezregel führt.

Simpsonregel / Keplersche Fassregel

Für $n = 2$ sowie $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ und $x_2 = b$ erhalten wir mit der Notation $c = x_1$ und $h = c - x_0 = x_2 - x_1$ gerade

$$\begin{aligned}
 L_0(c+x) &= \frac{x^2 - hx}{2h^2} & w_0 &= \int_{-h}^h L_0(c+x) dx = \frac{h}{3} \\
 L_1(c+x) &= -\frac{x^2 - h^2}{h^2} & w_1 &= \int_{-h}^h L_1(c+x) dx = \frac{4h}{3} \\
 L_2(c+x) &= \frac{x^2 + hx}{2h^2} & w_2 &= \int_{-h}^h L_2(c+x) dx = \frac{h}{3}
 \end{aligned}$$

Dies führt zur **Simpsonregel** und wir haben

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Fehlerabschätzung

Um den Fehler bei der Quadraturformel abschätzen zu können, erinnern wir uns an folgendes Fehlerabschätzung für Interpolationen

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad \xi \in [a; b]$$

Definieren wir $M := \max_{\xi \in [a; b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$, so gilt wegen $|x - x_i| \leq b - a$ gerade

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \int_a^b \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} dx = \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+2}$$

Dies führt dazu, dass Quadraturformeln, die Polynome vom Grad n benutzen, für Polynome vom Grad n exakte Lösungen liefern.

Polynome und Simpsonregel

Für die Monome $p_n(x) = x^n$ gilt gerade

$$I(p_n) = \int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Wir wissen, dass die Simpsonregel dies exakt berechnen sollte, falls $n \leq 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
 I_2(p_0) &= \frac{b-a}{6} [1 + 4 + 1] & &= \frac{b-a}{1} = I(p_0) \\
 I_2(p_1) &= \frac{b-a}{6} [a + 2(a+b) + b] & &= \frac{b^2 - a^2}{2} = I(p_1) \\
 I_2(p_2) &= \frac{b-a}{6} [a^2 + (a^2 + 2ab + b^2) + b^2] & &= \frac{b^3 - a^3}{3} = I(p_2) \\
 I_2(p_3) &= \frac{b-a}{6} [a^3 + \frac{1}{2}(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b^3] & &= \frac{b^4 - a^4}{4} = I(p_3)
 \end{aligned}$$

Zusammenfassung und Ausblick

Jede **Quadraturformel** I_n , die auf der **Lagrange-Darstellung** beruht, berechnet das Integral $I(f)$ exakt, falls $f \in \Pi_n$.

Wir können die Stützstellen so wählen, dass die Quadraturformel I_n auch für $f \in \Pi_{n+k}$ noch gilt. Das Ziel ist es, k möglichst groß zu wählen.

Die **Simpsonregel** berechnet $I(f)$ exakt für $f \in \Pi_3$, d.h. $k = 1$.

Die **Mittelpunktsregel** berechnet $I(f)$ exakt für $f \in \Pi_1$, d.h. $k = 1$.

Die **Gauß-Quadratur** kann $k = n + 1$ wählen, d.h. wir können z.B. zwei Stützstellen so wählen, dass $I_1(f) = I(f)$ für alle $f \in \Pi_3$ gilt.

Außerdem werden wir sehen, dass es für jede Quadratur I_n ein Polynom $f \in \Pi_{2n+2}$ gibt, so dass $I_n(f) \neq I(f)$, d.h. man kann die Gauß-Quadratur als optimale Quadratur interpretieren.

Skalarprodukte

Skalarprodukte (Wdh.)

Wir hatten bereits gesehen, dass die **stetigen Funktionen** oder die **Polynome** einen **\mathbb{R} -Vektorraum** beschreiben, d.h. man kann solche Funktionen addieren oder mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplizieren und erhält wieder eine stetige Funktion bzw. ein Polynom.

Als nächstes wollen wir ein Skalarprodukt für Funktionen definieren.

Sei \mathbb{V} ein \mathbb{R} -Vektorraum. Dann nennen wir eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt, wenn Folgendes gilt

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle &= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle && \text{(Linear in der ersten Komponente)} \\ \langle x, \alpha y + \beta z \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle && \text{(Linear in der zweiten Komponente)} \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle && \text{(Symmetrisch)} \\ \langle x, x \rangle &\geq 0 && \\ \langle x, x \rangle = 0 &\Leftrightarrow x = 0 && \text{(Positiv-Definit)} \end{aligned}$$

Skalarprodukte

Betrachten wir Funktionen aus $C^0([a, b])$, d.h. stetige Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so lässt sich wie folgt ein Skalarprodukt definieren

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

Man kann leicht sehen, dass dieser Ausdruck linear in f und in g ist. Die Symmetrie folgt aus der Kommutativität des Produkts. Die Positiv-Definitheit folgt aus der Stetigkeit der Funktionen.

Mit Hilfe des Skalarproduktes kann man von **orthogonalen Funktionen** sprechen. Zum Beispiel sind $\sin(\cdot), \cos(\cdot) \in C^0[-\pi, \pi]$ orthogonal zueinander:

$$\langle \sin, \cos \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \sin(x)^2 \right] dx = 0$$

Legendre-Polynome

Im Folgenden wollen wir eine **Orthogonalbasis von Polynomen** finden. Wir wollen also Polynome P_0, P_1, \dots finden, so dass Folgendes gilt

$$\begin{aligned} P_n &= x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i} \cdot x^i \\ \langle P_n, q \rangle &= 0 \quad \forall q \in \Pi_{n-1} \end{aligned}$$

Diese Polynome heißen **Legendre-Polynome**.

Hierzu reicht es aber, dass $\langle P_n, P_i \rangle = 0$ für alle $i < n$ gilt, da die vorherigen P_i ja bereits eine Basis von Π_{n-1} bilden.

Insbesondere kann man P_n wie folgt darstellen

$$P_n = (x + A)P_{n-1} + BP_{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} C_i P_i$$

Rekursion

Die Koeffizienten von $P_n = (x + A)P_{n-1} + BP_{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} C_i P_i$ lassen sich mit Hilfe von Skalarprodukten berechnen. Für $j < n - 2$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \langle P_n, P_j \rangle = \langle P_{n-1}, (x + A)P_j \rangle + B \langle P_{n-2}, P_j \rangle + \sum_{i=0}^{n-3} C_i \langle P_i, P_j \rangle \\ &= C_j \langle P_j, P_j \rangle \end{aligned}$$

Damit sind alle $C_i = 0$ und P_n hängt nur von P_{n-1} und P_{n-2} ab:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle xP_{n-1}, P_{n-1} \rangle + A \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle \Leftrightarrow A = -\frac{\langle xP_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \\ 0 &= \langle xP_{n-1}, P_{n-2} \rangle + B \langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle \Leftrightarrow B = -\frac{\langle xP_{n-1}, P_{n-2} \rangle}{\langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle} \end{aligned}$$

3-Term-Rekursion

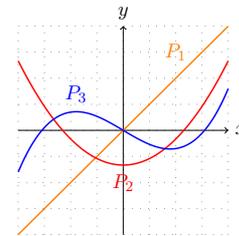
Insgesamt erhalten wir also die folgende **3-Term-Rekursion** für Polynome, die auf $[a; b]$ definiert sind:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 & P_1 &= x - \frac{a+b}{2} \\ P_n &= (x + A)P_{n-1} + BP_{n-2} & A &= -\frac{\langle xP_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \\ & & B &= -\frac{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle} \end{aligned}$$

Insbesondere bedeutet das für Polynome, die auf $[-1; 1]$ definiert sind:

$$P_0 = 1 \quad P_1 = x \quad P_2 = x^2 - \frac{1}{3} \quad P_3 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

Legendre-Polynome



Wir werden sehen, dass uns die **Nullstellen** dieser Polynome die **Stützstellen** der **Gauß-Quadratur** liefern werden.

Gauß-Quadratur

Gauß-Quadratur

Seien x_0, \dots, x_n die $n + 1$ Nullstellen des Legendre-Polynoms P_{n+1} . Dann wird dadurch die **Gauß-Quadratur** definiert

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot w_i$$

Diese Quadratur ist exakt für alle $q \in \Pi_n$. Weiter gibt es für jedes $p \in \Pi_{2n+1}$ nach Polynomdivision mit Rest folgende Darstellung

$$p = q \cdot P_{n+1} + r \quad q, r \in \Pi_n$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} I(p) &= \langle q, P_{n+1} \rangle + I(r) = I(r) \\ I_n(p) &= \sum_{i=0}^n q(x_i) P_{n+1}(x_i) w_i + I_n(r) = I_n(r) = I(r) \end{aligned}$$

Wir haben gesehen, dass die Gauß-Quadratur I_n für alle $q \in \Pi_{2n+1}$ exakt ist. Wir wollen zeigen, dass keine Quadratur alle $q \in \Pi_{2n+2}$ exakt integrieren kann.

Sei hierzu I_n eine beliebige Quadratur mit den Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$. Wir wählen nun $f(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \in \Pi_{2n+2}$.

Hierfür gilt nun

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx > 0$$

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n w_i \cdot \prod_{j=0}^n (x_i - x_j)^2 = 0$$

Das heißt jede Quadratur I_n kann bestenfalls die Polynomklasse exakt integrieren, die die Gauß-Quadratur integrieren kann.

Da die Gauß-Quadratur I_n für alle $q \in \Pi_{2n+1}$ exakt ist, ist sie auch exakt für $Q_i := \frac{P_{n+1}}{x-x_i} P_n \in \Pi_{2n}$: ($x_0 < \dots < x_n$ sind die Nullstellen von P_{n+1})

$$I_n(Q_i) = \sum_{j=0}^n w_j Q_i(x_j) = w_i P'_{n+1}(x_i) P_n(x_i)$$

Da $\frac{P_{n+1}}{x-x_i}$ als führenden Koeffizienten gerade 1 hat, haben wir die Darstellung $\frac{P_{n+1}}{x-x_i} = P_n + R$, wobei $R \in \Pi_{n-1}$ und wir erhalten:

$$I(Q_i) = \langle P_n, P_n \rangle + \langle P_n, R \rangle = \langle P_n, P_n \rangle$$

Somit erhalten wir also

$$w_i = \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{P'_{n+1}(x_i) P_n(x_i)}$$

Gauß-Quadratur auf $[-1; 1]$

Für $n = 0$ haben wir $P_1 = x$, $x_0 = 0$ und die Gauß-Quadratur I_0 wird zu

$$I_0(f) = 2 \cdot f(0)$$

Das ist genau die **Mittelpunktregel**.

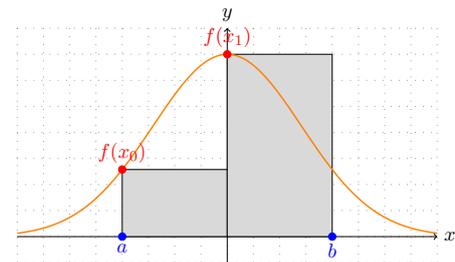
Für $n = 1$ haben wir $P_2 = x^2 - \frac{1}{3}$, $x_{0,1} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ und die Gauß-Quadratur I_1 :

$$I_1(f) = f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

Für $n = 2$ haben wir $P_3 = x^3 - \frac{3}{5}x$, $x_{0,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$ und

$$I_2(f) = \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

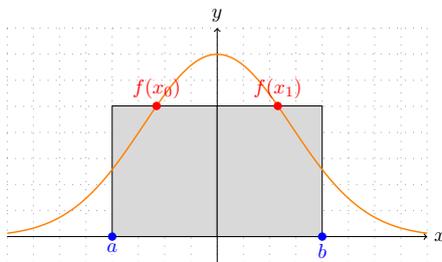
Naive Integration (I_1)



Für $f(x) = \exp(-x^2)$ ergibt sich nach der naiven Quadratur I_1 für \int_{-1}^1

$$I(f) \approx 1.49365 \quad I_1(f) \approx 1.36788 \quad \epsilon_{\text{rel}} \approx 8.42\%$$

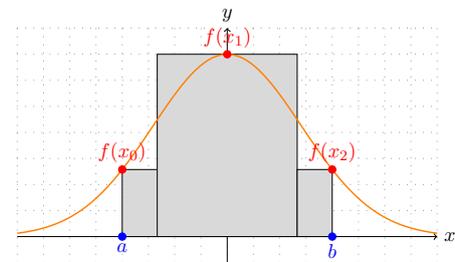
Gauß-Quadratur (I_1)



Für $f(x) = \exp(-x^2)$ ergibt sich nach der Gauß-Quadratur I_1 für \int_{-1}^1

$$I(f) \approx 1.49365 \quad I_1(f) \approx 1.43306 \quad \epsilon_{\text{rel}} \approx 4.06\%$$

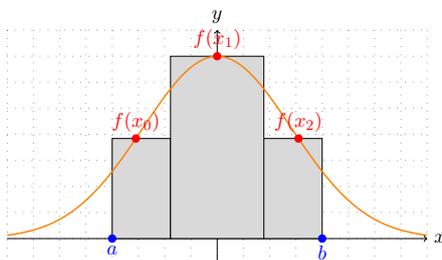
Simpsonregel (I_2)



Für $f(x) = \exp(-x^2)$ ergibt sich nach der Simpsonregel I_2 für \int_{-1}^1

$$I(f) \approx 1.49365 \quad I_2(f) \approx 1.57859 \quad \epsilon_{\text{rel}} \approx 5.69\%$$

Gauß-Quadratur (I_2)



Für $f(x) = \exp(-x^2)$ ergibt sich nach der Gauß-Quadratur I_2 für \int_{-1}^1

$$I(f) \approx 1.49365 \quad I_2(f) \approx 1.49868 \quad \epsilon_{\text{rel}} \approx 0.34\%$$

Vorteile und Nachteile

Für festes n ergibt sich mit der Gauß-Quadratur ein **optimales Ergebnis** für alle Polynome $p \in \Pi_{2n+1}$.

Falls das Resultat nicht gut genug ist, sollte man n **erhöhen**.

Dadurch werden sich aber alle Stützstellen ändern, d.h. es müssen **alle Stützstellen** neu ausgewertet werden.

Dieser Effekt kann abgemildert werden, indem man n in jedem Schritt verdoppelt. Man hat dann maximal doppelt so viele Stützstellen ausgewertet, wie nötig wären.

Wenn man die Gauß-Quadratur **dynamisch** benutzen möchte, müssen Nullstellen von Polynomen hohen Grades berechnet werden. Dies ist im Allgemeinen recht schwierig.

Dieses Problem kann überwunden werden, wenn wir die Legendre-Polynome bzgl. eines anderen **Skalarprodukts** berechnen.

Gewichtete Skalarprodukte

Ist eine Funktion $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ gegeben, so können wir das **bzgl. φ gewichtete Skalarprodukt** definieren

$$\langle f, g \rangle_\varphi = \int_a^b f(x)g(x)\varphi(x) dx$$

Damit läßt sich eine Gauß-Quadratur I_n beschreiben, die für jedes Polynom $p \in \Pi_{2n+1}$ das Integral $\int_a^b p(x)\varphi(x) dx$ exakt berechnet.

Von besonderem Interesse ist der folgende Fall

$$a = -1 \quad b = 1 \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Auch hierfür lässt sich eine Orthogonalbasis berechnen.

3-Term-Rekursion

Wir haben die folgende **3-Term-Rekursion** für die Basispolynome:

$$P_0 = 1 \quad P_1 = x \quad P_n = (x + A)P_{n-1} + BP_{n-2}$$

für

$$A = -\frac{\langle xP_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\varphi}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\varphi} \quad B = -\frac{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\varphi}{\langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle_\varphi}$$

Man kann zeigen, dass P_{2n} gerade und P_{2n+1} ungerade Funktionen sind. Damit ist $A = 0$ und wir haben

$$P_n = xP_{n-1} - \frac{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\varphi}{\langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle_\varphi} P_{n-2}$$

Weiter kann man zeigen, dass die 3-Term-Rekursion zur Rekursionsformel der **Tschebyscheff-Polynome** führt.

Gauß-Tschebyscheff-Quadratur

Wir haben also

$$P_n = \frac{1}{2^n} \cos((n+1) \cdot \cos^{-1}(x))$$

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$$

$$w_i = \frac{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_\varphi}{P'_n(x_i)P_{n-1}(x_i)} = \frac{\pi}{n+1}$$

Die **Gauß-Tschebyscheff-Quadratur** zur Berechnung von $\int_{-1}^1 f(x) dx$ ist also

$$I_n(f) = \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^n f\left(\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$$

Sie ist exakt für f , die sich als $f = \frac{p}{\sqrt{1-x^2}}$ für $p \in \Pi_{2n+1}$ darstellen lassen.

Romberg-Integration

Zusammengesetzte Quadratur

Mit Hilfe jeder Quadratur I_n kann man eine **zusammengesetzten Quadratur** definieren ($h = \frac{b-a}{k}$):

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^{a+h} f(x) dx + \dots + \int_{a+(k-1)h}^b f(x) dx$$

$$= h \cdot \sum_{i=1}^k \frac{f(a+(i-1) \cdot h) + f(a+i \cdot h)}{2} =: T_f(h)$$

Wir betrachten hier also die (recht ungenaue) Trapezregel.

Die wesentliche Idee der **Extrapolation** ist die **Euler-Maclaurin-Summe**, die man als komplizierte Erweiterung der Taylor-Entwicklung verstehen kann. Wir benutzen hier lediglich folgendes Ergebnis (τ_i hängen nur von a, b, f ab)

$$T_f(h) = I(f) + \tau_1 h^2 + \dots + \tau_{m-1} h^{2m-2} + \rho_m(h) h^{2m}$$

Extrapolation

Halbieren wir nun jedes Integrationsintervall und berechnen T_f erneut, so haben wir in der Tat die beiden Werte $T_f(h)$ und $T_f(h/2)$ berechnet.

Damit erhalten wir folgende Fehlerdarstellungen

$$T_f(h) = I(f) + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \dots + \tau_{m-1} h^{2m-2} + \rho_m(h) h^{2m}$$

$$T_f\left(\frac{h}{2}\right) = I(f) + \frac{h^2}{4} \tau_1 + \frac{h^4}{16} \tau_2 + \dots + \frac{h^{2m-2}}{2^{2m-2}} \tau_{m-1} + \frac{h^{2m}}{2^m} \rho_m(h)$$

Für die **Extrapolation** $R := \frac{4T_f(h/2) - T_f(h)}{3}$ ergibt sich dann aber

$$R = I(f) + \hat{\tau}_2 h^4 + \dots + \hat{\tau}_{m-1} h^{2m-2} + \rho_m(h) h^{2m},$$

d.h. wir konnten den Fehler von h^2 auf h^4 senken.

Romberg-Integration

Da wir diese Operation iterativ durchführen können, erhalten wir eine neue Quadratur, die ohne komplizierte Polynominterpolation auskommt. Diese Quadratur heißt **Romberg-Integration**.

Sie liefert $R(k, k)$ zurück nachdem $R(i, j)$ wie folgt berechnet wird

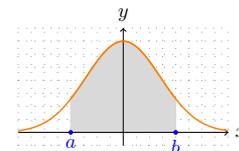
$$R(0, j) = T_f\left(\frac{b-a}{j+1}\right)$$

$$R(i, j) = \frac{4^j R(i, j-1) - R(i-1, j-1)}{4^j - 1}$$

Interessanterweise ergibt sich, dass $R(1, \cdot)$ gerade der Simpsonregel entspricht.

Ab $i = 3$ unterscheiden sich die Newton-Cotes-Formeln von der Romberg-Integration. Man kann zeigen, dass die Romberg-Integration numerisch stabiler sind als die Newton-Cotes-Formeln.

Romberg-Integration (Beispiel)



Um $R(k, k)$ ausgeben zu können, werden insgesamt $2^k + 1$ Stützstellen ausgewertet. Wir werden daher $R(k, k)$ mit den Quadraturen I_{2^k+1} vergleichen.

ϵ_{rel} in %	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
Trapezregel	50.741	8.4202	2.0693	0.5142	0.1283
Romberg	50.741	5.6866	0.3282	$< 7 \cdot 10^{-3}$	$< 5 \cdot 10^{-5}$
Gauß-Tschebyscheff	9.7932	3.2277	0.7694	0.2457	0.0697
Gauß	4.0562	0.3368	$< 2 \cdot 10^{-3}$	$< 2 \cdot 10^{-9}$	$< 5 \cdot 10^{-10}$